$$(x^{10})' = 10 \cdot x$$

$$(x^{100})' = 100\, x^{99}$$

$$(x^{n})' = n x^{n-1}$$

$$(7 \cdot x^{20})' = 7 \cdot 20\, x^{19}$$

$$= 140\, x^{19}$$

$$\boxed{(a \cdot f)' = a \cdot f'}$$

$$(e^{x})' = e^{x}$$

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$((x^{7}+5)^{100})' = 100\,(x^{7}+5)^{\boxed{99}}\,7x^{6}$$

$$((x^{3}+5)^{40})' = 40\,(x^{3}+5)^{39} \cdot 3x^{2}$$

$$\left(e^{2x^{10}+7}\right)' = 20x^{9} e^{(2x^{10}+7)}$$

$$\left(e^{2x^{10}+7}\right)' = 20x^9 e^{(2x^{10}+7)}$$

$$\left(e^{2x^{10}+7}\right)' = \left(\exp\left(2x^{10}+7\right)\right)' = \exp'\left(2x^{10}+7\right)\cdot 20x^9$$
$$= \exp\left(2x^{10}+7\right)\cdot 20x^9$$
$$= e^{2x^{10}+7}\cdot 20x^9$$

$$\left(e^{7x}\right)' = 7e^{7x}$$

$$\begin{tikzcd} e^{7x} \arrow[r, bend left, "\int dx"] & \dfrac{e^{7x}}{7} \arrow[l, bend left, "(\,)'"] \end{tikzcd}$$

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x e^{x^2}$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\begin{tikzcd} x\cdot e^{x^2} \arrow[r, bend left, "\int dx"] & \dfrac{e^{x^2}}{2} \arrow[l, bend left, "(\,)'"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x^2\cdot e^{x^3} \arrow[r, bend left, "\int dx"] & \dfrac{e^{x^3}}{3} \arrow[l, bend left, "(\,)'"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x\cdot e^{5x^2} \arrow[r, bend left, "\int dx"] & \dfrac{e^{5x^2}}{10} \arrow[l, bend left, "(\,)'"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

## 3 Distribution de Maxwell-Boltzmann des vitesses

On rappelle que la densité de probabilité qu'une molécule de masse $m$ d'un système à l'équilibre à la température $T$ ait une vitesse $\vec{v}$ à $d\vec{v}$ près est donnée, selon Maxwell, par :

$$P(\vec{v}) = C e^{-\beta \frac{m v^2}{2}},$$



où $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et où $C$ est une constante.

1 – Déterminer $C$ (la distribution de probabilité doit être normalisée).

2 – En déduire la densité de probabilité $F(v_z)$ que la projection selon l'axe $Oz$ du vecteur vitesse d'une molécule soit égale à $v_z$ à $dv_z$ près.

3 – Calculer la vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle$ d'une molécule.

4 – Calculer la vitesse quadratique moyenne $v_q$ d'une molécule, définie par $v_q^2 = \langle v^2 \rangle$.

5 – Montrer que l'énergie cinétique de translation moyenne d'une molécule est $\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} k_B T$.

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}^2 = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} P(\vec{V})\, d^3\vec{V} = \int P(v_x, v_y, v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$

$$= \int C e^{-\beta \frac{m v^2}{2}}\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$

$$= C\left(\int e^{-\frac{\beta m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}\, dv_x\, dv_y\, dv_z\right) = C \int e^{-\frac{\beta m v_x^2}{2}} dv_x \cdot \int e^{-\frac{\beta m v_y^2}{2}} dv_y \cdot \int e^{-\frac{\beta m v_z^2}{2}} dv_z$$

$$= C\left(\frac{\pi 2}{\beta m}\right)^{3/2} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{\beta m}}{\sqrt{2\pi}}\right)^3}$$

$$C = \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{-3/2}$$

$$\iint e^{x+y}\, dx\, dy = \iint e^x \cdot e^y\, dx\, dy = \int e^x dx \cdot \int e^y dy =$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$e^{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = e^{v_x^2}\, e^{v_y^2}\, e^{v_z^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\alpha = \frac{\beta m}{2}$$

$$2^3 = 8$$

$$2^{-3} = 0{,}08$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{5}$

$\mathbb{P}(X=3) = \frac{3}{5}$

$\mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{5}$

$$\mathbb{E}[X] = 2\cdot\mathbb{P}(X=2) + 3\cdot\mathbb{P}(X=3) + $$

$$= 2 \times \frac{1}{5} + 3\cdot\frac{3}{5} - 1\cdot\frac{1}{5}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{9}{5} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{10}{5} = 2$$

LU4PY105 — TD2 — Fluctuations & distribution Gaussienne — Physique Sorbonne Université

où $\beta = \frac{1}{k_BT}$ et où $C$ est une constante.

1 – Déterminer $C$ (la distribution de probabilité doit être normalisée).

2 – En déduire la densité de probabilité $F(v_x)$ que la projection selon l'axe $Ox$ du vecteur vitesse d'une molécule soit égale à $v_x$ à $dv_x$ près.

3 – Calculer la vitesse moyenne $\langle\vec{v}\rangle$ d'une molécule.

4 – Calculer la vitesse quadratique moyenne $v_q$ d'une molécule, définie par $v_q^2 = \langle\vec{v}^2\rangle$.

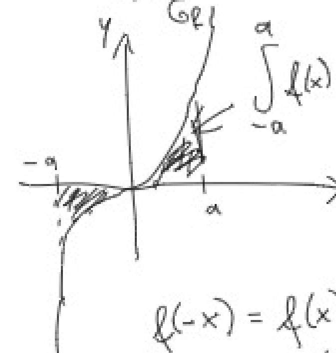
5 – Montrer que l'énergie cinétique de translation moyenne d'une molécule est $\langle e\rangle = \frac{3}{2}k_BT$.

3) $$\langle V_x\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} V_x \cdot P(\vec{V})\, d^3\vec{V} = \int v_x C e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv^3$$

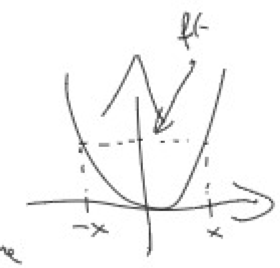
$$= C \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} v_x\, e^{-\frac{\beta m v_x^2}{2}} dv_x}_{=0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta m v_y^2}{2}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta m v_z^2}{2}} dv_z = \underline{\underline{0}}$$

$$\langle V_x\rangle = \langle V_y\rangle = \langle V_z\rangle$$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$




$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$




$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ paire

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ impair

$$\int x\cdot e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2}$$

$$\int x\cdot e^{5x^2} dx = \frac{e^{5x^2}}{10}$$

$$\int x\cdot e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha}$$

$f(x) = x\cdot e^{-x^2}$

$$f(-x) = -x\, e^{-(-x)^2} = -x\, e^{-x^2} = -f(x)$$

$$\langle\vec{V}\rangle = \begin{pmatrix}\langle V_x\rangle \\ \langle V_y\rangle \\ \langle V_z\rangle\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}} \checkmark$$

$$\mathbb{P}(V_x = v_x,\ V_y \in \mathbb{R},\ V_z \in \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} \langle v_z \rangle \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(V_x = v_x,\ V_y \in \mathbb{R},\ V_z \in \mathbb{R})$$

$$\parallel$$

$$F(v_x) = \iint \mathbb{P}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} dv_y\, dv_z$$

$$= C e^{-\frac{\beta m v_x^2}{2}} \int e^{-\frac{\beta m v_y^2}{2}} dv_y \int e^{-\frac{\beta m v_z^2}{2}} dv_z$$

$$= C e^{-\frac{\beta m v_x^2}{2}} \times \frac{2\pi}{\beta m}$$

LU4PY105 — TD2 — Fluctuations & distribution Gaussienne — PHYSIQUE SORBONNE UNIVERSITÉ

où $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et où $C$ est une constante.

1 – Déterminer $C$ (la distribution de probabilité doit être normalisée).

2 – En déduire la densité de probabilité $F(v_x)$ que la projection selon l'axe $Ox$ du vecteur vitesse d'une molécule soit égale à $v_x$ à $dv_x$ près.

3 – Calculer la vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle$ d'une molécule.

4 – Calculer la vitesse quadratique moyenne $v_q$ d'une molécule, définie par $v_q^2 = \langle \vec{v}^2 \rangle$.

5 – Montrer que l'énergie cinétique de translation moyenne d'une molécule est $\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} k_B T$.

$$\langle V_x^2 \rangle = C \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{\beta m v_x^2}{2}} dv_x \int e^{-\frac{\beta m v_y^2}{2}} dv_y \int e^{-\frac{\beta m v_z^2}{2}} dv_z$$

$$= C \left(\sqrt{\frac{\pi 2}{\beta m}}\right)^3 \times \frac{1}{\beta m}$$

$$\langle V_x^2 \rangle = \langle V_y^2 \rangle = \langle V_z^2 \rangle$$

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

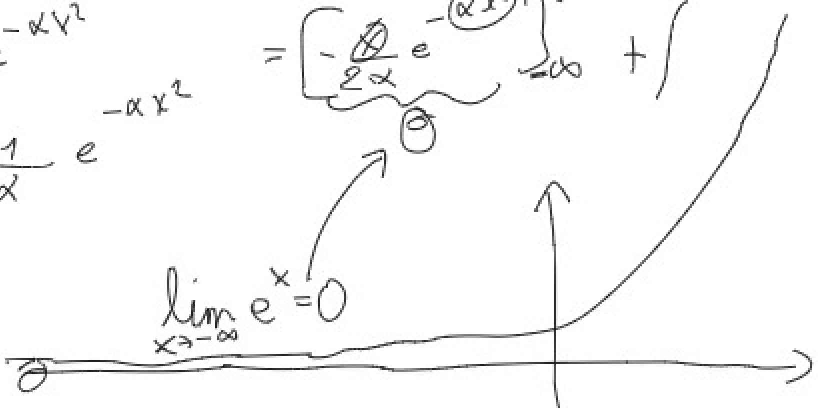
$$\int x^2 \cdot e^{-\alpha x^2} dx = \int x \cdot x \cdot e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{x}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} - \int -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \times \frac{1}{2\alpha}$$

$v = x \qquad u' = x e^{-\alpha x^2}$

$v' = 1 \qquad u = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}$

$$= \underbrace{\left[-\frac{x}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0} + \int$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$



miro

LU4PY105 TD2 — Fluctuations & distribution Gaussienne

où $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et où $C$ est une constante.

1 – Déterminer $C$ (la distribution de probabilité doit être normalisée).

2 – En déduire la densité de probabilité $F(v_x)$ que la projection selon l'axe $Ox$ du vecteur vitesse d'une molécule soit égale à $v_x$ à $dv_x$ près.

3 – Calculer la vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle$ d'une molécule.

4 – Calculer la vitesse quadratique moyenne $v_q$ d'une molécule, définie par $v_q^2 = \langle \vec{v}^2 \rangle$.

5 – Montrer que l'énergie cinétique de translation moyenne d'une molécule est $\langle e \rangle = \frac{3}{2} k_B T$.

$$E_{cin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} m\, C \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\beta m} \times 3$$

$$= \frac{3}{2} \cancel{m} \cdot \cancel{\left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{-3/2}} \cdot \cancel{\left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\beta \cancel{m}}$$

$$= \frac{3}{2\beta} \quad \text{et} \quad \beta = 1/k_BT$$

$$= \frac{3}{2} k_BT$$

$$\boxed{= \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{-3/2}}$$

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle$$

$$= \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

$$= 3 \cdot \langle v_x^2 \rangle$$

$$=$$

miro

$\boxed{\text{BM}}$

$\boxed{\text{Loi de Bernoulli}}$

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$\mathbb{P}(X=1) = p$ $\quad \mathbb{E}[X] = p$

$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

$\text{Var}(X) = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 = p - p^2 = p(1-p)$

$\langle X^2\rangle = \mathbb{E}[X^2] = X^2 \cdot P(X^2) = 1 \cdot \frac{v}{V} + \underbrace{0^2\left(1-\frac{v}{V}\right)}_{=0} = \frac{v}{V}$

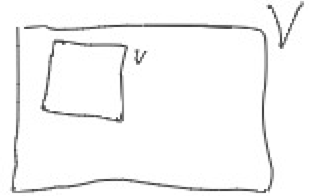
$X_i = 1$ iff particule $i$ est dans $v$

$X_i = 0$ sinon

$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{v}{V}$

$\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \frac{v}{V}$

$\mathbb{E}[X_i] = \langle x_i\rangle = 1 \times \frac{v}{V} + 0 \times \left(1-\frac{v}{V}\right) = \frac{v}{V}$



$= p = \frac{v}{V} \times N$

$\langle k\rangle = \frac{v}{V} \cdot N$

$\langle k\rangle = N \cdot \frac{v}{V}$

Nombre de particules dans v $\rightarrow k = \sum X_i$

$\langle k\rangle = \mathbb{E}[k] = \mathbb{E}\left[\sum X_i\right] = \sum \mathbb{E}[X_i] =$

$\text{Var}(k) = \langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2$

$\langle k^2\rangle$

$\text{Var}(X_i) = \frac{v}{V}\left(1-\frac{v}{V}\right)$

$\text{Var}(k) = \text{Var}\left(\sum X_i\right) = N\frac{v}{V}\left(1-\frac{v}{V}\right)$

$\langle k(k-1)\rangle + \langle k\rangle - \langle k\rangle^2 = \alpha T = \langle k\rangle$.

## 2 Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de $N$ molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume $V$. Soit $k$ le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume $v$ du récipient.

1 – Quelle est la valeur moyenne $\langle k\rangle$ de $k$ ?

2 – Quel est l'écart-type $\sigma_k$ de $k$ ?
Indice : on peut écrire la variable $k$ comme une somme de $N$ variables aléatoires indépendantes.
**Données** : $v = \frac{V}{2}$ et $N = 100$, puis $N = 10^{10}$ et $N = N_A$

3 – Faire l'application numérique

4 – Pour $N$ très grand et $\frac{v}{V}$ fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité $P(k)$ de $k$ ?

5 – Quelle est la probabilité que toutes les molécules du gaz soient dans le volume $v$ ?
On veut calculer la probabilité exacte $P(k)$ qu'il y ait $k$ molécules dans le volume $v$.

6 – De combien de manières différentes peut-on choisir les $k$ molécules parmi $N$ qui sont dans le volume $v$ ?

7 – Quelle est la probabilité de l'un de ces choix ? (par exemple, pour $k = 4$ et $N = 100$, quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 35 et 42, par exemple, soient dans le volume $v$ ?)

8 – En déduire l'expression de $P(k)$. Quel est le nom de cette distribution de probabilité ?

9 – On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n}. \quad (1)$$

Vérifier que la distribution de probabilité $P(k)$ est bien normalisée.

10 – Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à $x$, puis remplacer $y$ par $1-x$ dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de $k$.

11 – On se place à la limite thermodynamique ($N \to \infty$, $V \to \infty$ tels que la densité $\frac{N}{V}$ est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de $k$ se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de $\langle k\rangle$ (on posera $k = \langle k\rangle + x$ avec $x \ll N$). Ce résultat est-il surprenant ?

$v = \frac{V}{2} \quad N = 100 \quad N = 10^{10} \quad N = N_A$

$\sigma_k = \sqrt{N\frac{v}{V}\left(1 - \frac{v}{V}\right)}$

$N : 100 \Rightarrow \sigma_k = \sqrt{\frac{100}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{2}} = 5$

$N : 10^{10} \Rightarrow \sigma_k = \sqrt{10^{10} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{10^5}{2} = 0{,}5 \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^9$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{10^6} = 10^3$

$\sqrt{100^{50}} = 100^{25}$

$\frac{100^{10}}{2^{10}} = 50^{10}$

$\frac{100^{10}}{2} \neq 50^{10}$


## 2 Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de $N$ molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume $V$. Soit $k$ le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume $v$ du récipient.

1 – Quelle est la valeur moyenne $\langle k\rangle$ de $k$ ?

2 – Quel est l'écart-type $\sigma_k$ de $k$ ?
Indice : on peut écrire la variable $k$ comme une somme de $N$ variables aléatoires indépendantes.
**Données** : $v = \frac{V}{2}$ et $N = 100$, puis $N = 10^{10}$ et $N = N_A$

3 – Faire l'application numérique

4 – Pour $N$ très grand et $\frac{v}{V}$ fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité $P(k)$ de $k$ ?

5 – Quelle est la probabilité que toutes les molécules du gaz soient dans le volume $v$ ?
On veut calculer la probabilité exacte $P(k)$ qu'il y ait $k$ molécules dans le volume $v$.

6 – De combien de manières différentes peut-on choisir les $k$ molécules parmi $N$ qui sont dans le volume $v$ ?

7 – Quelle est la probabilité de l'un de ces choix ? (par exemple, pour $k = 4$ et $N = 100$, quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 35 et 42, par exemple, soient dans le volume $v$ ?)

8 – En déduire l'expression de $P(k)$. Quel est le nom de cette distribution de probabilité ?

9 – On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n}. \quad (1)$$

Vérifier que la distribution de probabilité $P(k)$ est bien normalisée.

10 – Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à $x$, puis remplacer $y$ par $1-x$ dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de $k$.

11 – On se place à la limite thermodynamique ($N \to \infty$, $V \to \infty$ tels que la densité $\frac{N}{V}$ est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de $k$ se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de $\langle k\rangle$ (on posera $k = \langle k\rangle + x$ avec $x \ll N$). Ce résultat est-il surprenant ?


$\binom{N}{k}$

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$

$N \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{v}{V}\right)}_{\neq 0}$

$\frac{v}{V} \cdot \frac{v}{V} \quad \left(\frac{v}{V}\right)^N$

Père de Noël a 10 présent
Tu peux en choisir 3 !
Combien de possibilités ?

6. $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \quad \binom{10}{3}$